巴中市高 2019 届第一次诊断性考试
理科数学参考答案与评分标准

一．选择题：每小题 5 分，共 60 分．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	D	B	A	D	C	A	A	B	A	B	D

1．**简析**：本题考查集合的表示及补集与交集运算，本题由 2018 年高考试题全国Ⅲ卷第 1 题改编，注重考查基础知识，突出基础性．选 C.

简解一：$\complement_{\mathbf{R}}B=\{x\mid x\leqslant 1\}$，故 $A\bigcap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{0,\ 1\}$.

简解二：由 $0,\ 1\notin B$，但 $2\in B$ 知，$A\bigcap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{0,\ 1\}$.

2．**简析**：本题考查复数的代数形式及其运算及共轭复数的概念，本题由 2017 年高考试题全国Ⅲ卷第 2 题改编，注重考查基础知识，突出基础性，选 D.

简解一：由 $z(1-\mathrm{i})=2\mathrm{i}$ 知：$z=\dfrac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{2\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{2}=-1+\mathrm{i}$，故 $\bar{z}=-1-\mathrm{i}$.

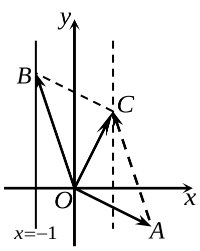
简解二：由 $z(1-\mathrm{i})=2\mathrm{i}$ 知：$z(1-\mathrm{i})^2=2\mathrm{i}(1-\mathrm{i})$，即 $z=-1+\mathrm{i}$，故 $\bar{z}=-1-\mathrm{i}$.

简解三：由 $z(1-\mathrm{i})=2\mathrm{i}$ 得：$\bar{z}(1+\mathrm{i})=-2\mathrm{i}=-(1+\mathrm{i})^2$，故 $\bar{z}=-1-\mathrm{i}$.

3．**简析**：本题考查三视图的基础知识，空间想象能力和逻辑推理能力，本题由 2016 年高考试题文科浙江卷第 9 题改编，以正方体和组合体为背景，注重基础性与综合性，选 B.

简解：由三视图知，该几何体是在棱长为 2 的正方体上半部分被截去左前方、右前方和右后方 3 个棱长为 1 的小正方体所得的组合体．故其体积为 5.

4．**简析**：本题考查平面向量的坐标表示与基本运算，平面向量垂直的条件及向量数量的分配律，向量运算的几何意义及数形结合思想等基础知识与思想方法，考查运算求解能力．本题参考 2018 年高考全国Ⅱ卷第 4 题及 2018 年高考全国Ⅲ卷第 13 题进行设计，注重基础性与综合性．选 A.



简解一：由已知得：$\vec{a}+\vec{b}=(1,\ x-1)$，$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=0$，所以 $2-(x-1)=0$，解得 $x=3$.

简解二：由 $\vec{a}\perp(\vec{a}+\vec{b})$ 得 $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}=5+(-2-x)=0$，解得 $x=3$.

简解三：如右图，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{a}+\vec{b}$，由 $\vec{b}=(-1,\ x)$ 知，向量 $\vec{b}$ 的终点在直线 $x=-1$，故由 $\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{OA}$ 知，点 C 的坐标为 $(1,\ 2)$，从而 $\vec{b}=(-1,\ 3)$ ．也可借助图形直观观察并结合选项得出结论，或代入验证．

5．**简析**：本题考查二项式定理，考查应用二项展开式解决与展开式系数有关的能力和运算求解能力，本题由 2018 年高考试题全国Ⅲ卷第 5 题改编，注重考查基础知识，突出基础性．选 D.

简解一：由二项展开式的通项 $T_{k+1}=\mathrm{C}_5^k(2x^2)^{5-k}(-\dfrac{1}{x})^k=(-1)^k2^{5-k}\mathrm{C}_5^kx^{10-3k}$ 及已知得，展开式中 x 的系数为 $(-1)^3 2^2\mathrm{C}_5^3=-40$.

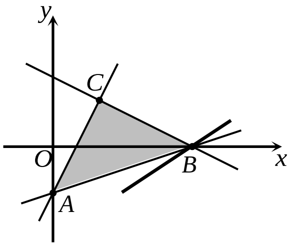
简解二：由二项式本身及指定项的特征知：需从 5 个 $2x^2-\dfrac{1}{x}$ 中的三个中选取 $-\dfrac{1}{x}$ 余下两个中都取 $2x^2$ 相乘得到含 x 的项，其系数为 $(-1)^3 2^2\mathrm{C}_5^3=-40$.

6．**简析**：本题考查等差数列的通项公式与求和公式及等差中项等基础知识，考查运算求解能力，考查函数方程思想及特殊与一般的思想．本题参考 2017 年高考试题全国Ⅱ卷第 4 题进行设计，注重基础性与应用性，选 C.

简解一：设首项与公差分别为 $a_1,\ d$，则由题意得：$S_9=9a_1+36d=36$，故 $a_5=a_1+4d=4$.

简解二：由题意得：$S_9=\dfrac{9(a_1+a_9)}{2}=9a_5=36$，故 $a_5=4$.

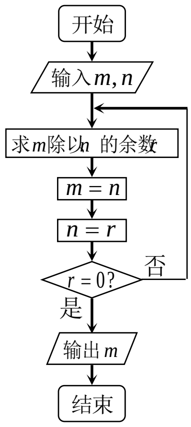
简解三：由等差数列的定义与通项公式知满足 $S_9=36$ 的等差数列不唯一，而 $a_n=4$ 符合题意，故 $a_5=4$．



7．**简析：**本题考查线性规划的基本思想与方法，考查数形结合思想，运算求解能力．本题参考 2017 年高考试题全国Ⅱ卷第 14 题和 2017 年高考试题全国Ⅲ卷第 13 题进行设计，注重基础性与应用性，选 A．

简解一：分别求出可行域边界直线的三个交点为 $A(0,\ -1),\ B(3,\ 0),\ C(1,\ 1)$，取特殊点 $(1,\ 0)$ 验证知，可行域为△ABC 及其内部，代 $A,\ B,\ C$ 的坐标入目标函数知当目标函数 $z=2x-3y$ 对应的直线过点 $B(3,\ 0)$ 时，目标函数 z 的最大值为 6．

简解二：作出约束条件对应的可行域，由目标函数 $z=2x-3y$ 知，z 是 x 的增函数且是 y 的减函数，故目标函数 $z=2x-3y$ 对应的直线位于最右下方即过点 $B(3,\ 0)$ 时，目标函数 z 的最大值为 6．

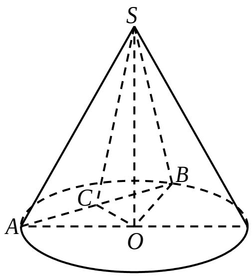


8．**简析：**本题考查算法程序框图的逻辑结构（直到型循环结构），考查对算法含义的理解及算法思想的理解与掌握．试题以欧几里得在公元前 300 年左右提出的“辗转相除法”为背景改编，注重数学文化的渗透，体现基础性、应用性及创新性．选 A．

简解：用列表法解答．输入 m=236，n=74 后，逐次执行循环体的结果如下表：

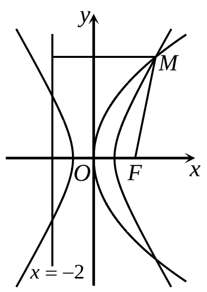
执行循环体次数	r	m	n	是否满足 r=0	输出 m
第一次	14	74	14	否	
第二次	4	14	4	否	
第三次	2	4	2	否	
第四次	0	2	0	是	2

9．**简析：**本题考查圆锥的概念及体积公式，空间直线与直线、平面与平面的位置关系，二面角及其平面角，考查空间想象能力、逻辑推理能力和运算求解能力．本题为自编题，注重基础性、综合性、应用性与创新性，选 B．



简解：如右图，设 AB 的中点为 C，连结 $SC,\ OC$，则 $AB\perp CO,\ AB\perp SC$，故 $\angle SCO$ 为二面角 S－AB－O 的平面角，所以 $\angle SCO=45°$；在等腰直角三角形 SAB 中，$SA=SB$=2，故 $CA=CB=CS=\sqrt{2}$；由圆锥的性质知 $SO\perp$平面 AOB，故 $SO\perp OC$，所以 $CO=SO=1$；在直角三角形 ACO 中 $AO^2=AC^2+CO^2=3$，所以 $V=\frac{1}{3}\pi\times AO^2\times SO=\pi$．

10．**简析：**本题考查抛物线的定义、标准方程与几何性质，考查双曲线的标准方程及离心率等基础知识，考查数形结合思想与方程思想，考查逻辑推理能力和运算求解能力．本题为自编题，注重基础性、综合性、应用性与创新性，选 A．



简解一：由题意设点 $M(m,\ n)$，抛物线 $C_1:y^2=8x$ 的准线为 $x=-2$，由抛物线的定义及 $|MF|=5$ 得 $m+2=5$，即 $m=3$，故 M 的坐标为 $(3,\ \pm2\sqrt{6})$；由 M 在双曲线 $x^2-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上，得 $9-\frac{24}{b^2}=1$，解得 $b^2=3$，所以双曲线的离心率 $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=2$．

简解二：设点 $M(m,\ n)$，由题意知抛物线 $C_1:y^2=8x$ 的准线为 $x=-2$ 且 $n^2=8m$，由抛物线的定义及 $|MF|=5$ 得 $m+2=5$，故 $m=3$，$n^2=24$；由点 M 在双曲线 $C_2:\ x^2-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上得：$m^2-\frac{n^2}{b^2}=1$，故 $b^2=3$，所以双曲线的离心率 $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=2$．

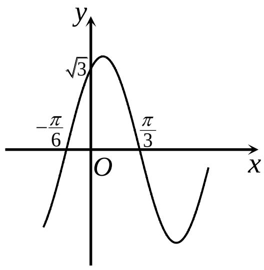
简解三：设点 $M(m,\ n)$，抛物线 $C_1:y^2=8x$ 的焦点为 $F(2,\ 0)$，由 $|MF|=5$ 得 $(m-2)^2+n^2=25$，由 $\begin{cases}n^2=8m,\\(m-2)^2+n^2=25.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=3,\\n^2=24.\end{cases}$；由点 M 在双曲线 $C_2:\ x^2-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上得：$9-\frac{24}{b^2}=1$，解得 $b^2=3$，所以双曲线的离心率 $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=2$．

简解四：由 $\begin{cases}y^2=8x,\\b^2x^2-y^2=b^2.\end{cases}$ 解得 $x=\frac{4+\sqrt{16+b^4}}{b^2}$，又抛物线 $C_1:y^2=8x$ 的准线为 $x=-2$，由 $|MF|=5$

得 $\dfrac{4+\sqrt{16+b^4}}{b^2}+2=5$，解得 $b^2=3$，所以双曲线的离心率 $e=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=2$．

11．**简析：**本题考查正弦型函数的图象与性质，对中心对称的理解，考查数形结合思想与方程思想，考查逻辑推理能力和运算求解能力．本题为自编题，注重基础性、综合性、应用性和创新性，选 B．

简解一：由题意得 $\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ T=\pi$，由 $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ 且 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ 得 $\omega=2,\ \varphi=\dfrac{\pi}{3}$，即 $f(x)=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$，所以函数 $f(x)$ 的图象的对称中心坐标为 $(\dfrac{k\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6},\ 0)\quad(k\in\mathbf{Z})$．由 $f(t+x)+f(t-x)=0$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都成立知点 $(t,\ 0)$ 是 $f(x)$ 的图象的对称中心，故 $t=\dfrac{k\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6},\ k\in\mathbf{Z}$，所以 $|t|_{\min}=\dfrac{\pi}{6}$．



简解二：由题意得 $\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ T=\pi$，由 $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ 且 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ 得 $\omega=2,\ \varphi=\dfrac{\pi}{3}$，即 $f(x)=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$，观察 $f(x)$ 的图象（如右图）知：$|t|_{\min}=\dfrac{\pi}{6}$．

简解三：由 $f(t+x)+f(t-x)=0$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都成立知点 $(t,\ 0)$ 是 $f(x)$ 的图象的对称中心．由题意得 $\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ T=\pi$，由 $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ 且 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ 得 $\omega=2,\ \varphi=\dfrac{\pi}{3}$，即 $f(x)=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$．故将 $y=\sin x$ 的图象先向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位得到 $y=\sin(x+\dfrac{\pi}{3})$ 的图象，再 $y=\sin(x+\dfrac{\pi}{3})$ 的图象上的所有点的横坐标缩短到原来的一半（纵坐标不变）得到 $y=\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$ 的图象，最后将 $y=\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$ 图象上的所有点的纵坐标伸长到原来的 2 倍（横坐标不变）得到 $f(x)$ 的图象，所以 $f(x)$ 的图象上与原点最近的对称中心为 $(-\dfrac{\pi}{6},\ 0)$，故 $|t|_{\min}=\dfrac{\pi}{6}$．

简解四：由 $f(t+x)+f(t-x)=0$ 在 $\mathbf{R}$ 上成立知点 $(t,\ 0)$ 是 $f(x)$ 图象的对称中心．由题意得 $T=\pi$，$\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，由 $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ 且 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ 得 $\omega=2,\ \varphi=\dfrac{\pi}{3}$，即 $f(x)=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$．代选项验证知，选 B．

12．**简析：**本题考查对数函数的图象与性质，导数的运用，不等式等基础知识，考查函数与方程思想，特殊与一般的思想及数形结合思想，考查逻辑推理能力和运算求解能力，灵活与综合运用知识分析解决问题的能力．本题为改编题，体现基础性、综合性、应用性和创新性，选 D．

简解一：令 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，则 $g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，由 $g'(x)=0$ 得 $x=e$，当 $0<x<e$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；当 $x>e$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，故 $g(x)_{\max}=g(e)=\dfrac{1}{e}$．对于选项 A，由题意得：$k=\dfrac{\ln x}{x}$，故 $k<(\dfrac{\ln x}{x})_{\max}$，所以 $0<k<\dfrac{1}{e}$．对于选项 B，由 $\dfrac{\ln a}{a}=\dfrac{\ln b}{b}$ 得 $b\ln a=a\ln b$，变形得 $\ln a^b=\ln b^a$，所以 $a^b=b^a$．对于选项 C，不妨设 $0<a<b$，则 $0<a<e<b$，于是 $a+b>2e$ 等价于 $e<2e-a<b$，由函数 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 的单调性知，$e<2e-a<b$ 等价于 $\dfrac{\ln(2e-a)}{2e-a}>\dfrac{\ln b}{b}$，又 $\dfrac{\ln a}{a}=\dfrac{\ln b}{b}$，故等价于 $\dfrac{\ln(2e-a)}{2e-a}>\dfrac{\ln a}{a}$，变形得 $a\ln(2e-a)-(2e-a)\ln a>0$：记 $h(x)=x\ln(2e-x)+(x-2e)\ln x$，则 $h'(x)=\ln(2ex-x^2)-\dfrac{4e^2}{2ex-x^2}+2$

令 $t=2ex-x^2$，则当 $0<a<e$ 时 $t\in(0,\ e^2)$，从而有 $\varphi(t)=\ln t-\dfrac{4e^2}{t}+2$ 在 $(0,\ e^2)$ 内是增函数，故 $\varphi(t)<\varphi(e^2)=0$，从而当 $0<a<e$ 时 $h'(x)<0$，即 $h(x)$ 在 $(0,\ e)$ 内是减函数，故 $h(x)>h(e)=0$，所以当 $0<a<e$ 时恒有 $a\ln(2e-a)-(2e-a)\ln a>0$，即 $a+b>2e$ 成立．选项 D 不成立，事实上恒有 $a\cdot b>e^2$．

$a\cdot b>e^2\Leftrightarrow\ln a+\ln b>2$．由 $k=\dfrac{\ln a}{a}=\dfrac{\ln b}{b}$ 及等比定理得：$\ln a+\ln b=k(a+b)=(a+b)\cdot\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}=\dfrac{\frac{b}{a}+1}{\frac{b}{a}-1}\cdot\ln\dfrac{b}{a}$，

设 $t=\dfrac{b}{a}\ (t>1)$，则 $\ln a+\ln b>2$ 等价于 $\dfrac{t+1}{t-1}\cdot\ln t>2$，即 $(t+1)\ln t>2(t-1)$，设 $g_1(t)=(t+1)\ln t-2(t-1)\ (t>1)$，则 $g_1'(t)=\ln t+\dfrac{1}{t}-1$，$g_1''(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t^2}>0$，所以 $g_1'(t)$ 在 $(1,\ +\infty)$ 上单调递增，$g_1'(t)>g_1'(1)=0$．所以 $g_1(t)$ 在 $(1,\ +\infty)$ 上单调递增，$g_1(t)>g_1(1)=0$．从而有 $(t+1)\ln t>2(t-1)$，所以 $\ln a+\ln b>2$，故 $a\cdot b>e^2$．

简解二：对于选项C，令 $f_1(x)=\ln x-kx$；$p(x)=f_1(e-x)-f_1(e+x),\ x\in(0,\ e)$，则 $p'(x)=-\dfrac{2e}{e^2-x^2}+2k$ $<\dfrac{2e}{x^2-e^2}+\dfrac{2}{e}<\dfrac{-2e}{e^2}+\dfrac{2}{e}=0$，从而 $p(x)$ 在区间 $(0,\ e)$ 上单调递减，$p(x)<p(0)=0$，即恒有 $f_1(e-x)<f_1(e+x)$；令 $e-x=a$，则 $f_1(a)=a(\dfrac{\ln a}{a}-k)=0<f_1(2e-a),\ x\in(0,\ e)$，从而 $\dfrac{f_1(2e-a)}{2e-a}>0=\dfrac{f_1(b)}{b}$；因函数 $y=\dfrac{f_1(x)}{x}$ 在 $(e,\ +\infty)$ 单调递减，故应有 $2e-a<b$，从而 $a+b>2e$．

简解三：对于 B、C、D 选项，可利用特殊值进行判断．取 $a=2,\ b=4$，则 $k=\dfrac{\ln 2}{2}=\dfrac{\ln 4}{4}$，从而知选项B、C正确，但D不正确．

简解四：数形结合法．如图1或图2，借助图形直观进行判断．

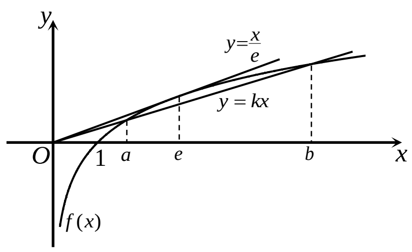


图1

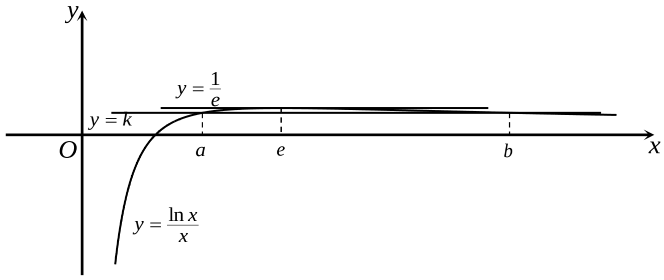


图2

二．填空题：每小题5分，共20分．

13．$\underline{\dfrac{1}{2}}$．　　14．$\underline{a_n=\dfrac{1}{2^n}}$．　　15．$\underline{3x-y-4=0}$．　　16．$\underline{(-\infty,\ 1)\cup(2,\ 3)}$．

13．**简析：**本题考查对数的概念，指数式与对数式的变换，对数及指数幂运算等基础知识，考查运算求解能力．本题为自编题，体现基础性、综合性．

简解一：由 $\log_a 4=-2$ 得 $a^{-2}=4$ 且 $a>0$，故 $a=4^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$．

简解二：由 $\log_a 4=-2$ 得 $a^{-2}=4$ 且 $a>0$，故 $a^2=\dfrac{1}{4}$，所以 $a=\dfrac{1}{2}$．

简解三：由 $\log_a 4=-2$ 得 $2\log_a 2=-2$，故 $\log_a 2=-1$，所以 $a=\dfrac{1}{2}$．

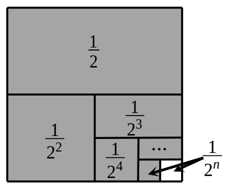
简解四：由 $\log_a 4=-2$ 得 $\log_a\dfrac{1}{4}=2$，故 $\log_a\dfrac{1}{2}=1$，所以 $a=\dfrac{1}{2}$．

14．**简析：**本题考查数列的通项及前 n 项和的概念，考查逻辑推理能力和运算求解能力．本题依据《庄子•天下篇》中记载的“一尺之棰，日取其半，万世不竭”设计，与“二分法”关联，也可视为改编自2016年浙江卷理科数学第13题，体现基础性与综合性．

简解一：由 $a_n+S_n=1$ 知：当 $n=1$ 时有 $2a_1=1$ 即 $a_1=\dfrac{1}{2}$，当 $n\geqslant 2$ 时，有 $a_{n-1}+S_{n-1}=1$，故 $a_n+S_n=a_{n-1}+S_{n-1}$，变形得：$2a_n+S_n-S_{n-1}=a_{n-1}$，由 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant 2)$ 知 $a_n=\dfrac{1}{2}a_{n-1}$，所以 $a_n=\dfrac{1}{2^n}$．

简解二：由 $a_n+S_n=1$ 知：当 $n=1$ 时有 $2S_1=1$ 即 $S_1=\dfrac{1}{2}$，又当 $n\geqslant 2$ 时 $a_n=S_n-S_{n-1}$，故 $2S_n-S_{n-1}=1$，变形得：$S_n-1=\dfrac{1}{2}(S_{n-1}-1)$，于是 $S_n-1=-\dfrac{1}{2^n}$，所以 $a_n=\dfrac{1}{2^n}$．

简解三：从特殊到一般，归纳得出通项公式．由 $a_n+S_n=1$，分别取 $n=1,2,3$ 可计算得：$a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_2=\dfrac{1}{4}$，$a_3=\dfrac{1}{8}$，猜想 $a_n=\dfrac{1}{2^n}$，回代验证知结论正确．



简解四：如右图，将边长为1的正方形进行如下切割，第一次取其面积的 $\dfrac{1}{2}$，以后各次取剩余部分面积的 $\dfrac{1}{2}$，记各次取得的面积依次为 a_n，前 n 次取下的面积的总和为 S_n，则有 $a_n+S_n=1$，$a_n=\dfrac{1}{2^n}$．

15．**简析：**本题考查导数公式、求导法则、导数的几何意义，基本不等式及直线方程等基础知识，考查逻辑推理能力与运算求解能力．本题为自编题，体现基础性、综合性、应用性与创新性．

简解：由题意得 $f'(x)=x+\dfrac{1}{x-1}\ \ (x>1)$，由基本不等式得 $x+\dfrac{1}{x-1}\geqslant 1+2\sqrt{(x-1)\cdot\dfrac{1}{x-1}}=3$，当且仅当 $x=2$ 时取等号，故 $f'(x)_{\min}=f'(2)=3$，此时切点为 $(2, f(2))$ 即 $(2,\ 2)$，所以曲线 $y=f(x)$ 的斜率最小的切线方程为 $3x-y-4=0$．

16．**简析：** 本题考查函数的奇偶性、单调性的基本概念，考查指数函数的图象与性质及不等式的性质等基础知识，考查分类与整合思想，化归与转化思想，特殊与一般的思想及数形结合思想，考查逻辑推理能力和运算求解能力．本题为自编题，体现基础性、综合性、应用性和创新性，选 D.

简解一：由 $\boldsymbol{f(x)}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，$y=2^x-2^{-x}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数知 $g(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数．当 $x\geqslant 0$ 时 $\boldsymbol{f(x)}$ 与 $y=2^x-2^{-x}$ 均为增函数且 $y=2^x-2^{-x}$ 恒非负，由 $f(1)=0$ 知：$g(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 内仅 $g(1)=0$，故当 $x\geqslant 0$ 时，$g(x)>0\Leftrightarrow x>1,\ g(x)<0\Leftrightarrow 0<x<1$，故 $g(x)>0$ 在 $\mathbf{R}$ 上的解集为 $(-1,\ 0)\cup(1,\ +\infty)$．由 $2-x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$ 得 $x\in(-\infty,\ 1)\cup(2,\ 3)$，所以 $g(2-x)>0$ 的解集为 $(-\infty,\ 1)\cup(2,\ 3)$．

简解二：$y=2^x-2^{-x}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数且为增函数，其图象如右图 1 所示；偶函数 $f(x)$ 在 $[0,\ +\infty)$ 上单调递增且 $f(1)=0$，其图象基本特征如右图 2，数形结合可得 $g(x)>0$ 在 $\mathbf{R}$ 上的解集为 $(-1,\ 0)\cup(1,\ +\infty)$．而函数 $g(2-x)$ 的图象与 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 轴对称，所以 $g(2-x)>0$ 的解集为 $(-\infty,\ 1)\cup(2,\ 3)$．

简解三：举符合题意的特殊函数 $f(x)=x^2-1$ 验证.

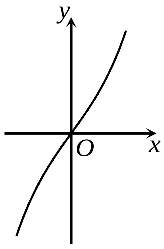


图 1

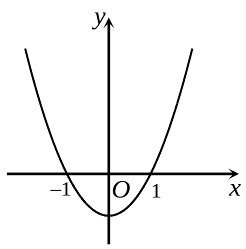


图 2

说明：

对于具有奇偶性的函数，研究其相关问题时常先研究 $(0,\ +\infty)$ 内的情况，再利用对称性获知定义域的整体情况；具有周期性的函数，研究其相关问题时常先研究其在一个周期的情况，再由周期性推知定义域的整体情况．当函数的图像具有对称性时，研究方法与奇（偶）函数相近．要充分运用这种从局部到整体、从特殊到一般的基本数学思想方法.

三．解答题：共 70 分.

（一）必考题：共 60 分.

17．（12 分）

分析： 本题考查对三角恒等变换的基本公式与方法的掌握情况，正弦和余弦定理及面积公式等基础知识，考查化归转化思想，考查逻辑推理能力和运算求解能力，以及分析与解决问题的能力．本题为自编题，命制时充分分析参考了 2017 年高考试题全国Ⅲ卷第 17 题的命题思路，在考查三角函数与解三角形模块的系统知识与方法的同时，兼顾了三角函数与解析几何的联系，体现基础性、综合性、应用性与创新性.

解：（1）$f(x)=2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{x}{2}\sin\frac{\pi}{4})+1$ ………………………… 1 分

$=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-2\sin^2\frac{x}{2}+1$

$=\sin x+\cos x$ ………………………… 3 分

$=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$ ………………………… 4 分

∴ $f(x)$ 取得最大值为 $\sqrt{2}$ ………………………… 5 分

又 $f(A)=\sqrt{2}=\frac{b}{3},\ 0<A<\pi$

∴ $A=\frac{\pi}{4},\ b=3\sqrt{2}$ ………………………… 6 分

（2）**解法一：**

由 $\tan(A+B)=7$ 及 $A=\frac{\pi}{4}$，得：$\tan(A+B)=\dfrac{1+\tan B}{1-\tan B}=7$ ………………………… 7 分

∴ $\tan B=\frac{3}{4}$，故 $4\sin B=3\cos B$ ………………………… 8 分

又 $B\in(0,\ \pi)$ ∴ $\sin B=\frac{3}{5}$ ………………………… 9 分

由（1）知 $A=\frac{\pi}{4},\ b=3\sqrt{2}$

由正弦定理知：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$

∴ $a=\dfrac{b\sin A}{\sin B}=\dfrac{3\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{3}{5}}=5$ ……………………………………………………………………10 分

由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 得 $25=18+c^2-6c$，即 $c^2-6c-7=0$，解得 $c=7$ ………11 分

∴ $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A==\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times7\times\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{21}{2}$． ……………………………………………12 分

解法二：

由 $\tan(A+B)=7$ 及内角和定理得：$\tan(A+B)=\tan(\pi-C)=-\tan C=7$，即 $\tan C=-7$ ………7 分

∴ $\sin C=-7\cos C$

又 $C\in(0,\pi)$ 且 $\sin^2C+\cos^2C=1$

∴ $\sin C=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$，$\cos C=-\dfrac{\sqrt{2}}{10}$ ………………………………………………………………………9 分

∴ $\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\dfrac{7\sqrt{2}}{10}-\dfrac{\sqrt{2}}{10})=\dfrac{3}{5}$ ………………………………10 分

由正弦定理，得：$a=\dfrac{b\sin A}{\sin B}=\dfrac{3\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{3}{5}}=5$ ……………………………………………………11 分

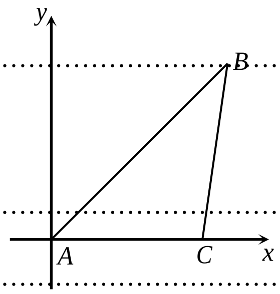
∴ $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times5\times3\sqrt{2}\times\dfrac{7\sqrt{2}}{10}=\dfrac{21}{2}$． ……………………………………………12 分

解法三：

由 $\tan(A+B)=7$ 及内角和定理得：$\tan(A+B)=\tan(\pi-C)=-\tan C=7$，即 $\tan C=-7$ ………7 分

以 A 为原点，AC 边所在直线为 x 轴建立直角坐标系（如图），则 $C(3\sqrt{2},\ 0)$ ……………8 分

于是 AB 边所在直线的方程为 $y=x$



边 BC 所在直线的方程为 $y=7(x-3\sqrt{2})$ ……………………………………………………9 分

由 $\begin{cases}y=x,\\ y=7(x-3\sqrt{2}).\end{cases}$ 解得：$x=y=\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$

即点 B 的坐标为 $(\dfrac{7\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{7\sqrt{2}}{2})$ ……………………………………………………………………10 分

∴ AC 边上的高为 $h=\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$ ………………………………………………………………………11 分

∴ $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}bh=\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times\dfrac{7\sqrt{2}}{2}=\dfrac{21}{2}$． ……………………………………………………12 分

18．（12 分）

分析：本题以折叠问题为背景考查空间线面、面面间的平行与垂直的相关概念、判定与性质，空间向量方法在二面角计算中的应用，考查空间想象能力、推理论证能力和运算求解能力．本题为自编题，命制时充分分析参考了 2016 年高考试题全国Ⅱ卷第 19 题、2018 年全国Ⅰ卷第 18 题的命题思路和 2018 年全国Ⅲ卷第 19 题对立几大题的难度控制，体现基础性、综合性、应用性与创新性．

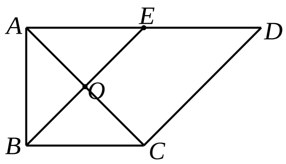


图 1

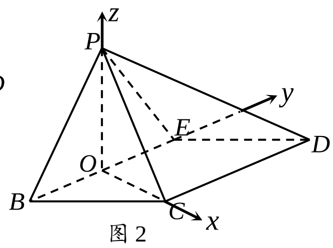


图 2

解：（1）证明：在图 1 中，由 AB＝BC，AE∥BC，且 $AB\perp AD$ 知：四边形 $ABCE$ 是正方形……1 分

连结 AC，则 O 为 AC 的中点，且 $AC\perp BE$

于是，在图 2 中，有 $BE\perp OP$，$BE\perp OC$……………………………………………………………2 分

∵ $PO\cap OC$＝O，且 $PO,\ OC\subset$ 平面 POC

∴ $BE\perp$ 平面 POC ……………………………………………………………………………………3 分

又 BC∥DE，且 BC＝DE，

∴ 四边形 $BCDE$ 为平行四边形

∴ CD∥BE …………………………………………………………………………………………4 分

∴ $CD\perp$ 平面 POC ………………………………………………………………………………5 分

∵ $CD\subset$平面 PCD

∴ 平面 $PCD\perp$平面 POC. ……………………………………………………………6 分

（2）由（1）知，$BE\perp OP$

∵ 平面 $PBE\perp$平面 $BCDE$，且平面 $PBE\cap$平面 $BCDE=BE$

∴ $PO\perp$平面 $BCDE$，故 $PO\perp OC$ ……………………………………………………7 分

从而 OC，OE，OP 三直线两两垂直

以 O 为原点，以直线 OC，OE，OP 分别为 x，y，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系

设 OB=1，则由（1）知 $OB=OC=OP=OE=1$

故 $C(1,\ 0,\ 0)$，$E(0,1,0)$，$B(0,\ -1,\ 0)$，$P(0,\ 0,\ 1)$，$D(1,\ 2,\ 0)$

∴ $\overrightarrow{CP}=(-1,\ 0,\ 1)$，$\overrightarrow{BP}=(0,\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{EP}=(0,\ -1,\ 1)$，$\overrightarrow{ED}=(1,\ 1,\ 0)$ ……………………8 分

设平面 PBC 的一个法向量为 $\vec{m}=(x,\ y,\ z)$

由 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{CP}=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BP}=0.\end{cases}$ 得：$\begin{cases}-x+z=0,\\ y+z=0.\end{cases}$ 取 $x=1$ 得：$\vec{m}=(1,\ -1,\ 1)$ ……………………………9 分

设平面 PED 的一个法向量为 $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$

由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{EP}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{ED}=0.\end{cases}$ 得：$\begin{cases}-y+z=0,\\ x+y=0.\end{cases}$ 取 $y=1$ 得：$\vec{n}=(-1,\ 1,\ 1)$ ……………………………10 分

∴ $\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{1\times(-1)+(-1)\times1+1\times1}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{3}$ ……………………………11 分

∴ 平面 PBC 与平面 PDE 所成二面角（锐角）的余弦值为$\dfrac{1}{3}$. …………………………12 分

注：$PO\perp OC$ 也可如下证明：

由（1）知，$BE\perp OP$，$BE\perp OC$，故$\angle POC$ 为二面角 $P-BE-C$ 的平面角

∵ 平面 $PBE\perp$平面 $BCDE$

∴ $\angle POC=\dfrac{\pi}{2}$，即 $PO\perp OC$.

19．（12 分）

分析：本题考查概率与统计的基础知识、基本思想方法，考查对频率分布表、随机变量相互独立性的检验、相互独立事件与互斥事件的概率、二项分布及随机变量的期望等知识的理解程度和实际应用能力，考查数据处理能力和运算求解能力．本题为自编题，命制时充分分析参考了 2017 年高考试题全国Ⅱ卷、Ⅲ卷的第 18 题和 2018 年全国Ⅲ卷第 18 题的的命题思路，体现基础性、综合性、应用性与创新性．

解：（1）由题意，该行业的男性从业人员中，业绩指标不低于 30 的频率为$\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{10}=\dfrac{3}{10}$

该行业的女性从业人员中，业绩指标不低于 30 的频率为$\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{10}=\dfrac{1}{2}$ ……1 分

∴ 20 位男性中，业绩指标不低于 30 的有$\dfrac{3}{10}\times20=6$人，业绩指标低于 30 的有 14 人

20 位女性中，业绩指标不低于 30 的有$\dfrac{1}{2}\times20=10$人，业绩指标低于 30 的有 10 人 ……2 分

由此得 2×2 列联表如下：……………………………………………………………………3 分

	低于 30	不低于 30	总计
男性	14	6	20
女性	10	10	20
总计	24	16	40

∴ $k=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\dfrac{40(140-60)^2}{20\times20\times24\times16}=\dfrac{5}{3}<2$ ……………………………4 分

∴ $P(K^2\geqslant\dfrac{5}{3})>P(K^2\geqslant2.706)=0.10$ ………………………………………………………5 分

∴ 没有 90%的把握认为此项业绩等级与性别有关. ……………………………………6 分

（2）**解法一：**

由题意，任选一位该行业的男性从业人员，其业绩等级为“优秀”的概率为$\dfrac{3}{10}$

任选一位该行业的女性从业人员，其业绩等级为“优秀”的概率为$\frac{1}{2}$ ………7 分

记抽取的 2 名男性中业绩为优秀的人数为 X_1，则服从二项分布：$X_1 \sim B(2,\ \frac{3}{10})$

即 $P(X_1=k)=C_2^k(\frac{3}{10})^k(1-\frac{3}{10})^{2-k}=C_2^k(\frac{3}{10})^k(\frac{7}{10})^{2-k}$，$k=0,\ 1,\ 2$ ………………8 分

∴ $EX_1=2\times\frac{3}{10}=\frac{3}{5}$ ……………………………………9 分

记抽取的 2 名女性中业绩为优秀的人数为 X_2，则 X_2 服从二项分布：$X_2 \sim B(2,\ \frac{1}{2})$

即 $P(X_2=m)=C_2^m(\frac{1}{2})^m(1-\frac{1}{2})^{2-m}=\frac{1}{4}C_2^m$，$m=0,\ 1,\ 2$ ………………10 分

∴ $EX_2=2\times\frac{1}{2}=1$ ……………………………………11 分

由题意知：$X=X_1+X_2$

∴ $EX=E(X_1+X_2)=EX_1+EX_2=\frac{3}{5}+1$ ……………………12 分

解法二：

由题意知，X 的所有可能取值为：0，1，2，3，4 ……………………7 分

从该行业的男性从业人员中任抽取一位，其业绩等级为“优秀”的概率为$\frac{3}{10}$

记抽取的男性中业绩为优秀的人数为 X_1，则 X_1 服从二项分布：$X_1 \sim B(2,\ \frac{3}{10})$ ………8 分

从该行业的女性从业人员中任抽取一位，其业绩等级为“优秀”的概率为$\frac{1}{2}$

记抽取的女性中业绩为优秀的人数为 X_2，则 X_2 服从二项分布：$X_2 \sim B(2,\ \frac{1}{2})$ ………9 分

∴ $P(X=0)=P(X_1=0)P(X_2=0)=\frac{1}{4}C_2^0C_2^0(\frac{7}{10})^2=\frac{49}{400}$

$P(X=1)=\frac{1}{4}C_2^0C_2^1(\frac{3}{10})(\frac{7}{10})+\frac{1}{4}C_2^1C_2^0(\frac{7}{10})^2=\frac{7}{20}$

$P(X=2)=\frac{1}{4}C_2^1C_2^1(\frac{3}{10})(\frac{7}{10})+\frac{1}{4}C_2^2C_2^0(\frac{7}{10})^2+\frac{1}{4}C_2^0C_2^2(\frac{3}{10})^2=\frac{71}{200}$ ………………10 分

$P(X=3)=\frac{1}{4}C_2^2C_2^1(\frac{3}{10})(\frac{7}{10})+\frac{1}{4}C_2^1C_2^2(\frac{3}{10})^2=\frac{3}{20}$

$P(X=4)=\frac{1}{4}C_2^2C_2^2(\frac{3}{10})^2=\frac{9}{400}$ ……………………………11 分

于是得：X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{49}{400}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{71}{200}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{9}{400}$

∴ $EX=0\times\frac{49}{400}+1\times\frac{7}{20}+2\times\frac{71}{200}+3\times\frac{3}{20}+4\times\frac{9}{400}=\frac{9+35+71}{400}=\frac{45}{100}$ ……………………12 分

20．（12 分）

分析：本题考查平面向量的概念，曲线与方程、点的轨迹等解析几何的基本内容与方法，直线与椭圆的位置关系，考查数形结合思想、函数方程思想及化归转化思想，考查逻辑推理能力和运算求解能力，以及分析与解决问题的能力．本题为自编题，命制时充分分析参考了 2017 年高考试题全国Ⅰ卷、Ⅱ卷的第 20 题和 2018 年全国Ⅰ卷理科第 19 题的命题思路，体现基础性、综合性、应用性与创新性．

解：（1）**解法一**

设点 $A(a,\ 0)$，$B(0,\ b)$，$M(x,\ y)$，则有：$a^2+b^2=9$ ① ……………………1 分

由 $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MA}$，得：$(x,\ y-b)=2(a-x,\ -y)$ ……………………2 分

∴ $\begin{cases} x=2(a-x), \\ y-b=-2y. \end{cases}$ 变形得：$\begin{cases} a=\frac{3}{2}x, \\ b=3y. \end{cases}$ ② ……………………3 分

由①②消去 $a,\ b$，化简得：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ ……………………4 分

∴ 曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ ……………………5 分

解法二

由 $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MA}$ 得：$\overrightarrow{BA}=3\overrightarrow{MA}$ ………………………………………………………… 1 分

∴ $3|\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{BA}|=3$，故 $|\overrightarrow{MA}|=1$ ………………………………………………………… 2 分

设点 $A(a,\ 0)$，$M(x,\ y)$，则由 $\overrightarrow{BA}=3\overrightarrow{MA}$ 得：$a=3(a-x)$

∴ $a=\frac{3}{2}x$ ………………………………………………………………………… 3 分

∴ $|\overrightarrow{MA}|=1=\sqrt{(\frac{3}{2}x-x)^2+y^2}$，化简得：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ …………………………………… 4 分

∴ 曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ ………………………………………………………… 5 分

解法三

设直线 AB 的倾斜角为 α，点 $M(x,\ y)$

由 $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MA}$ 及$|AB|=3$，得：$|\overrightarrow{BM}|=2,\ |\overrightarrow{MA}|=1$ ……………………………………… 1 分

当点 M 不在 x 轴下方时，恒有 $\begin{cases}x=-2\cos\alpha,\\ y=\sin\alpha.\end{cases}$ ……………………………………… 2 分

当点 M 在 x 轴下方时，恒有 $\begin{cases}x=2\cos\alpha,\\ y=-\sin\alpha.\end{cases}$ ………………………………………… 3 分

消去 α 得：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ ………………………………………………………………… 4 分

∴ 曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ ………………………………………………………… 5 分

（2）**解法一**

依题意，设直线 l 的方程为 $x=ny+4$，$P(ny_1+4,\ y_1)$，$Q(ny_2+4,\ y_2)$，则 $N(ny_2+4,\ -y_2)$

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1,\\ x=ny+4.\end{cases}$ 消去 x，整理得：$(4+n^2)y^2+8ny+12=0$ ……………………………… 6 分

由直线 l 与 C 相交，得：$(8n)^2-48(4+n^2)=16(n^2-12)>0$，即 $n<-2\sqrt{3}$，或 $n>2\sqrt{3}$ ……… 7 分

由根与系数的关系得：$y_1+y_2=\frac{-8n}{4+n^2}$，$y_1y_2=\frac{12}{4+n^2}$ ③ …………………………… 8 分

若直线 PN 过定点，则由椭圆的对称性知，该定点必在 x 轴上

设该定点坐标为 $E(m,\ 0)$

则由 P、E、N 共线，得：$\overrightarrow{PE}//\overrightarrow{PN}$ ………………………………………………… 9 分

又 $\overrightarrow{PE}=(m-ny_1-4,\ -y_1)$，$\overrightarrow{PN}=(n(y_2-y_1),\ -y_1-y_2)$

∴ $-(m-ny_1-4)(y_1+y_2)+y_1n(y_2-y_1)=0$，化简得：$(m-4)(y_1+y_2)=2ny_1y_2$ ④ ………… 10 分

由③入④得：$\frac{-8n(m-4)}{4+n^2}=\frac{24n}{4+n^2}$，解得：$m=1$ ……………………………………… 11 分

∴ 直线 PN 恒过定点 $(1,\ 0)$． ………………………………………………………… 12 分

解法二

当直线 l 过椭圆的上顶点 $(0,\ 1)$ 时，直线 l 的方程为 $x+4y-4=0$ ……………………… 6 分

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1,\\ x+4y-4=0.\end{cases}$ 消去 x，整理化简得：$5y^2-8y+3=0$

解得：$y=1$，或 $y=\frac{3}{5}$，于是，得 $P(\frac{8}{5},\ \frac{3}{5})$，$Q(0,\ 1)$，此时，$N$ 的坐标为 $(0,\ -1)$

∴ 直线 PN 的方程为 $y=x-1$ ………………………………………………………… 7 分

由椭圆的对称性知，当直线 l 过椭圆的下顶点 $(0,\ -1)$ 时，直线 PN 的方程为 $y=-x+1$

由 $\begin{cases}y=x-1,\\ y=-x+1.\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}x=1,\\ y=0.\end{cases}$

故直线 l 若经过定点，则该定点为 $E(1,\ 0)$ ……………………………………………… 8 分

下证：当直线 l 与椭圆相交时，恒有：点 P、E、N 共线

设直线 l 的方程为 $y=k(x-4)$，$P(x_1,\ k(x_1-4))$，$Q(x_2,\ k(x_2-4))$，则 $N(x_2,\ -k(x_2-4))$

$\overrightarrow{PE}=(1-x_1,\ -k(x_1-4))$，$\overrightarrow{NE}=(1-x_2,\ k(x_2-4))$ ……………………………… 9 分

由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1,\\ y=k(x-4).\end{cases}$ 消去 y 整理得：$(1+4k^2)x^2-32k^2x+64k^2-4=0$

由直线 l 与 C 相交，得：$(-32k^2)^2-4(1+4k^2)(64k^2-4)=16(1-12k^2)>0$，即 $-\dfrac{\sqrt{3}}{6}<k<\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

由根与系数的关系得：$x_1+x_2=\dfrac{32k^2}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{64k^2-4}{1+4k^2}$ ……………………………………10 分

于是 $k(x_2-4)(1-x_1)-[-k(x_1-4)](1-x_2)=k[5(x_1+x_2)-2x_1x_2-8]=k[\dfrac{160k^2}{1+4k^2}-\dfrac{128k^2-8}{1+4k^2}-8]$

$$=\frac{k(160k^2-128k^2+8-8-32k^2)}{1+4k^2}=0$$

由向量共线的坐标表示，知：$\overline{PE}//\overline{NE}$，即：点 P、E、N 共线 ………………………11 分

∴ 直线 PN 恒过定点 $(1,0)$． ……………………………………………………………12 分

解法三

由题意，设直线 l 的方程为 $y=k(x-4)$，$P(x_1,\ k(x_1-4))$，$Q(x_2,k(x_2-4))$，则 $N(x_2,\ -k(x_2-4))$

直线 PN 的方程为：$y-k(x_1-4)=\dfrac{k(x_1-4)+k(x_2-4)}{x_1-x_2}(x-x_1)$

化简得：$(x_1-x_2)y=k(x_1+x_2-8)x-2k[x_1x_2-2(x_1+x_2)]$ ……………………………7 分

由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1,\\ y=k(x-4).\end{cases}$ 消去 y 整理得：$(1+4k^2)x^2-32k^2x+64k^2-4=0$

由直线 l 与 C 相交，得：$(-32k^2)^2-4(1+4k^2)(64k^2-4)=16(1-12k^2)>0$，即 $-\dfrac{\sqrt{3}}{6}<k<\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ ··8 分

由根与系数的关系得：$x_1+x_2=\dfrac{32k^2}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{64k^2-4}{1+4k^2}$ ……………………………………9 分

代入直线 PN 的方程，得：$(x_1-x_2)y=k(\dfrac{32k^2}{1+4k^2}-8)x-2k[\dfrac{64k^2-4}{1+4k^2}-\dfrac{64k^2}{1+4k^2}]$

化简得：$(x_1-x_2)y=-\dfrac{8k}{1+4k^2}(x-1)$ ……………………………………………………11 分

故，对任意 $k\in(-\dfrac{\sqrt{3}}{6},\ \dfrac{\sqrt{3}}{6})$，直线 PN 是否恒过定点 $(1,\ 0)$ ……………………………12 分

说明：

本套试题成卷于 2018 年 11 月上旬，成都一诊数学试题公开后发现本题的第 1 问与成都一诊的第 20 题的第 1 问几乎相同，本想换题，后经命题组成员反复考虑后认为，为检测学生的听课、纠错及复习效果并达到复习巩固深化的目的，最终决定保留原题不作改动．

21．（12 分）

分析：本题考查利用导数研究函数单调性的方法、函数的零点和极值的概念，导数公式与导数的运算法则，考查数形结合思想、函数方程思想、分类与整合思想及化归转化思想，考查逻辑推理能力和运算求解能力，以及灵活运用导数工具分析与解决问题的能力．本题为自编题，命制时充分分析参考了 2017 年高考试题全国Ⅰ卷第 21 题、2018 年全国Ⅰ卷（文科）、Ⅱ卷（理科）、Ⅲ卷（文科）第 21 题的命题思路，体现基础性、综合性、应用性与创新性．

解：（1）由 $f(x)=(ax^2+x)e^x$ 得：$f'(x)=[ax^2+(2a+1)x+1]e^x$ ………………………………1 分

∵ $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的一个极值点

∴ $f'(1)=[a+(2a+1)+1]e=0$，解得：$a=-\dfrac{2}{3}$ ……………………………………………2 分

∴ $f'(x)=(-\dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{1}{3}x+1)e^x$

由 $f'(x)=0$，得 $-\dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{1}{3}x+1=0$，解得：$x=1$，或 $x=-\dfrac{3}{2}$ ……………………………3 分

随 x 的变化，$f'(x)$ 与 $f(x)$ 的变化规律如下表：………………………………………………4 分

x	$x<-\dfrac{3}{2}$	$x=-\dfrac{3}{2}$	$-\dfrac{3}{2}<x<1$	$x=1$	$x>1$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘		↗		↘

∴ $f(x)$ 的增区间为 $(-\frac{3}{2}, 1)$，减区间为 $(-\infty, -\frac{3}{2})$，$(1, +\infty)$ ······························ 5 分

（2）**解法一**

"曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=x$ 有且只有一个公共点"等价于：

"关于 x 的方程 $(ax^2+x)e^x=x$ 有且只有一解"

由 $(ax^2+x)e^x=x$ 得：$x[(ax+1)e^x-1]=0$，故 $x=0$ 是 $(ax^2+x)e^x=x$ 的一个解

∴ 关于 x 的方程 $(ax+1)e^x-1=0$ 只有唯一解 $x=0$ 或无实数解 ······························ 6 分

$(ax+1)e^x-1=0$ 等价于 $(ax+1)-e^{-x}=0$

设 $h(x)=(ax+1)-e^{-x}$，则 $h'(x)=a+e^{-x}$

（i）若 $a\geqslant 0$，则 $h'(x)>0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，函数 $h(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数

此时方程 $(ax+1)-e^{-x}=0$ 只有唯一解：$x=0$ ······························ 7 分

∴ 当 $a\geqslant 0$ 时，关于 x 的方程 $(ax^2+x)e^x=x$ 有且只有一解 $x=0$，符合题意 ········ 8 分

（ii）若 $a<0$，则 $h'(x)=0$ 的解为 $x=-\ln(-a)$

当 $x<-\ln(-a)$ 时 $h'(x)>0$；当 $x>-\ln(-a)$ 时 $h'(x)<0$

∴ 函数 $h(x)$ 有极大值 $h(-\ln(-a))=-a\ln(-a)+1+a$ ······························ 9 分

设 $\varphi(a)=-a\ln(-a)+1+a$，则 $\varphi'(a)=-\ln(-a)$

∵ 仅当 $a=-1$ 时，$\varphi'(a)=0$，且 $a<-1$ 时 $\varphi'(a)<0$，$a>-1$ 时 $\varphi'(a)>0$

∴ 当 $a=-1$ 时 $\varphi(a)$ 取得极小值 $\varphi(-1)=0$ ······························ 10 分

即 当 $a=-1$ 时，$x=-\ln(-a)=0$，$h(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值为 0，

当 $a<0$ 且 $a\neq -1$ 时，$x=-\ln(-a)\neq 0$ 且 $h(x)$ 的极大值大于 0

∴ 当 $a=-1$ 时，方程 $(ax+1)-e^{-x}=0$ 只有唯一解 $x=0$，符合题意；

当 $a<0$ 且 $a\neq -1$ 时，方程 $(ax+1)-e^{-x}=0$ 有异于 0 的另一解，不合题意． ······ 11 分

综上所述，a 的取值范围为 $\{-1\}\cup[0, +\infty)$． ······························ 12 分

解法二

"曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=x$ 有且只有一个公共点"等价于：

"关于 x 的方程 $(ax^2+x)e^x=x$ 有且只有一解"

由 $(ax^2+x)e^x=x$ 得：$x[(ax+1)e^x-1]=0$，故 $x=0$ 是 $(ax^2+x)e^x=x$ 的一个解 ···················· 6 分

于是关于 x 的方程 $(ax+1)e^x-1=0$ 无非零解，即 $ax+1-e^{-x}=0$ 无非零解 ······················ 7 分

若 $a\geqslant 0$，则当 $x>0$ 时，$0<e^{-x}<1$，$ax\geqslant 0$，此时 $ax+1-e^{-x}>0$

当 $x<0$ 时，$e^{-x}>1$，$ax<0$，此时 $ax+1-e^{-x}<0$

故 $a\geqslant 0$ 时，$ax+1-e^{-x}=0$ 无非零解，符合题意 ······························ 9 分

若 $a<0$，则由 $ax+1-e^{-x}=0$ 得：$ax+1=e^{-x}$

因为直线 $y=ax+1$ 与函数 $g(x)=e^{-x}$ 的图象均过原点(0, 1) ······························ 10 分

故 "方程 $ax+1-e^{-x}=0$ 无非零解"等价于"直线 $y=ax+1$ 与曲线 $y=e^{-x}$ 相切于点(0, 1)

∵ $g'(x)=-e^{-x}$

∴ $a=g'(0)=-1$，即 $a=-1$，符合题意 ······························ 11 分

综上所述，a 的取值范围为 $\{-1\}\cup[0, +\infty)$． ······························ 12 分

解法三

"曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=x$ 有且只有一个公共点"等价于：

"关于 x 的方程 $(ax^2+x)e^x=x$ 有且只有一解"

由 $(ax^2+x)e^x=x$ 得：$x[(ax+1)e^x-1]=0$，故 $x=0$ 是 $(ax^2+x)e^x=x$ 的一个解

于是关于 x 的方程 $(ax+1)e^x-1=0$ 无非零解，即 $ax+1-e^{-x}=0$ 无非零解 ······················ 6 分

当 $x\neq 0$ 时，由 $ax+1-e^{-x}=0$ 得：$a=\dfrac{e^{-x}-1}{x}$

记 $h(x)=\dfrac{e^{-x}-1}{x}$，则 $h'(x)=\dfrac{-x-1+e^x}{x^2e^x}$ ······························ 7 分

记 $\varphi(x)=e^x-x-1$，则 $\varphi'(x)=e^x-1$

当 $x>0$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 单调递增；当 $x<0$ 时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 单调递减

∴ $\varphi(x)>\varphi(0)=0$ ······························ 8 分

∴ $h'(x)=\dfrac{-x-1+e^{x}}{x^{2}e^{x}}>0$

∴ $h(x)$ 在 $(-\infty,\ 0),\ (0,\ +\infty)$ 上是增函数 ……………………………………………………9 分

由导数的定义知：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}-1}{x}=(e^{-x}-1)'|_{x=0}=-1$ ……………………………………………10 分

∴ 当 $x<0$ 时，$h(x)<-1$；当 $x>0$ 时，$-1<h(x)<0$

故 当 $a\in(-\infty,\ -1)\cup(-1,\ 0)$ 时，关于 x 的方程 $ax+1-e^{-x}=0$ 有非零解，不合题意……11 分

∴ a 的取值范围为 $\{-1\}\cup[0,+\infty)$． ……………………………………………………………12 分

（二）选考题：共 10 分．

22．［选修 4－4：坐标系与参数方程］（10 分）

分析： 本题考查圆的参数方程与直线的极坐标方程的基本概念，直角坐标方程与极坐标方程、参数方程与普通方程间的互化，直线与圆的位置关系、点到直线的距离等基础知识，考查数形结合思想、函数方程思想及化归转化思想，考查运算求解能力，以及分析与解决问题的能力．本题为 2018 年高考全国III第 6 题改编而得，体现基础性、综合性、创新性．

解：（1）由 $\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$ 得：$\rho\sin\theta+\rho\cos\theta=2$ ………………………………………1 分

∴ 直线 l 的直角坐标方程为 $x+y=2$ ……………………………………………………………2 分

由 $\begin{cases}x=-2+\sqrt{2}\cos\alpha,\\ y=\sqrt{2}\sin\alpha.\end{cases}$ （α 为参数）消去参数 α 得：$(x+2)^{2}+y^{2}=2$ ……………………3 分

∴ 曲线 C 是以点 $M(-2,\ 0)$ 为圆心，以 $\sqrt{2}$ 为半径的圆

∵ 点 M 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|-2+0-2|}{\sqrt{1^{2}+1^{2}}}=2\sqrt{2}>\sqrt{2}$ ……………………………………4 分

∴ 直线 l 与曲线 C 相离 …………………………………………………………………………5 分

（2）**解法一**

由（1）知：直线 l 与两坐标轴分别交于 $A(2,\ 0),\ B(0,\ 2)$ ……………………………………6 分

∴ $|AB|=2\sqrt{2}$ ……………………………………………………………………………7 分

由（1）知点 P 到直线 l 的距离的最大值为 $d+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$ ……………………………………9 分

∴ $(S_{\triangle ABP})_{\max}=\dfrac{1}{2}|AB|\times3\sqrt{2}=6$ ………………………………………………………10 分

解法二

设点 P 到直线 l 的距离为 h，则：

$h=\dfrac{|-2+\sqrt{2}\cos\alpha+\sqrt{2}\sin\alpha-2|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}-\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})$ ……………………………………7 分

由 $\alpha\in\mathbf{R}$ 知：$-1\leqslant\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})\leqslant1$ ……………………………………………………………8 分

∴ $\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=-1$ 时，$h_{\max}=3\sqrt{2}$ ………………………………………………………9 分

∴ $(S_{\triangle ABP})_{\max}=\dfrac{1}{2}|AB|\times3\sqrt{2}=6$ ………………………………………………………10 分

23．［选修－5：不等式选讲］（10 分）

分析： 本题考查不等式的基本性质、绝对值不等式的求解、分段函数等基础知识，考查数形结合思想、函数方程思想、分类与整合思想及化归转化思想，考查逻辑推理能力和运算求解能力．本题为改编题，命制时充分分析参考了 2017 年高考试题全国 I 卷、III卷的第 23 题和 2018 年全国 I 卷、II 卷第 23 题的命题思路，体现基础性、综合性与创新性．

解：（1）解法一

当 $a=2$ 时，由 $f(x)=5$ 得：$|x+3|+|x-2|=5$

当 $x\leqslant-3$ 时，原方程变形为 $-x-3+(-x+2)=5$，解得：$x=-3$ ……………………1 分

当 $-3<x\leqslant2$ 时，原方程变形为 $3-x+(-x+2)=5$，解得：$-3<x\leqslant2$ …………………2 分

当 $x>2$ 时，原方程变形为 $x+3+(x-2)=5$，解得：$x=2$ 与 $x>2$ 矛盾 …………………3 分

综上所述，x 的取值范围为$[-3,\ 2]$ ……………………………………………………………5 分

解法二

当$a=2$时， $f(x)=|x+3|+|x-2|$

由绝对值不等式知：$|x+3|+|x-2|\geqslant|(x+3)-(x-2)|=5$ ……………………………3 分

当且仅当$-3\leqslant x\leqslant 2$时，等号成立 …………………………………………………………4 分

∴ $|x+3|+|x-2|=5$的解集为$[-3,\ 2]$，即 x 的取值范围为$[-3,\ 2]$ ……………………5 分

（2）**解法一**

由$a>0$知：$a>-3$

∴ $f(x)=|x+3|+|x-a|=\begin{cases}-2x-3+a, & x\leqslant -3,\\ 3+a, & -3<x\leqslant a,\\ 2x+3-a, & x\geqslant a.\end{cases}$ ……………………………………6 分

当$3+a\geqslant 6$时，不等式 $f(x)\geqslant 6$的解集为 $\mathbf{R}$，不合题意 ……………………………………7 分

当$3+a<6$时，不等式 $f(x)\geqslant 6$可化为：

$\begin{cases}-2x-3+a\geqslant 6,\\ x\leqslant -3.\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2x+3-a\geqslant 6,\\ x\geqslant a.\end{cases}$ ………………………………………………………8 分

即 $\begin{cases}x\leqslant \dfrac{a-9}{2},\\ x\leqslant -3.\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\geqslant \dfrac{3+a}{2},\\ x\geqslant a.\end{cases}$ ………………………………………………………………9 分

∵ $f(x)\geqslant 6$的解集为$(-\infty,\ -4]\cup[2,\ +\infty)$

∴ $\dfrac{a-9}{2}=-4$，解得：$a=1$

经检验，$a=1$符合题意，故$a=1$ ………………………………………………………………10 分

解法二

由 $f(x)\geqslant 6$得：$|x+3|+|x-a|\geqslant 6$

∵ $f(x)\geqslant 6$的解集为$(-\infty,\ -4]\cup[2,\ +\infty)$

∴ $x=-4$与$x=2$是 $f(x)=6$的两根，即$\begin{cases}|-4+3|+|-4-a|=6, & ①\\ |2+3|+|2-a|=6. & ②\end{cases}$ …………………7 分

由①得：$|a+4|=5$，解得：$a=1$或$a=-9$ ………………………………………………8 分

由②得：$|-a+2|=1$，解得：$a=1$或$a=3$ ………………………………………………9 分

∴ $a=1$ ………………………………………………………………………………………10 分

备注：

因命题者水平有限，试题一定存在诸多不足之处，还可能出现答案有疏漏或错误及评分标准不合理等不足，望各位同仁在体谅的同时批评指正！更欢迎各位老师加 QQ 群 524986271 就命题工作提出宝贵建议与意见，以帮助我们提升试题质量。

祝各位老师寒假愉快！新年顺心如意！